9/5/16

Φασματικό Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ο A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^t \cdot A \cdot P$ είναι διαγώνιος

P ορθογώνιος $P^t P = I = P \cdot P^t$ $\quad P^{-1} = P^t$

* Κάθε συμμετρικός πίνακας είναι διαγωνίσιμος
* Όλες οι ιδιοτιμές συμμετρικού πίνακα είναι πραγματικές.
* Για κάθε ιδιοτιμή συμμετρικού πίνακα η γεωμετρική πολλαπλότητα ισούται με την αλγεβρική
* Για κάθε συμμετρικό πίνακα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους
* Υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Άσκηση: Για τον συμμετρικό πραγματικό πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ να βρείτε ορθογώνιο πίνακα P

$(A^t = A)$ έτσι ώστε $P^t \cdot A \cdot P$ να είναι διαγώνιος

Λύση

Χαρακτηρ. Πολυώνυμο $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$ $\quad$ χαρ. πολ. $= \det(A - xI_{3\times3})$

$\Leftrightarrow \chi_A(x) = 0 \cdot | \ | + (2-x)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} + 0 \, | \ |$

$\Leftrightarrow \chi_A(x) = (2-x)\left((3-x)^2 - (-1)^2\right)$

$= (2-x)(2-x)(4-x)$

Άρα Ιδιοτιμές $\quad 2$ (διπλή)

4 (απλή)

$$V(2)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\,(A-2I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$x+0\cdot y-z=0$
$y=t$
$z=s$

Άρα $x=s$
$y=t$
$z=s$

$$V(2)=\left\{\begin{pmatrix}s\\t\\s\end{pmatrix}\middle|\,s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

ορθοκανονική βάση του $V(2)$

$$V(4)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\,(A-4I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$A-4I\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&-1&0\\0&-2&0&0\\-1&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\to r_2/-2]{r_1\to -r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\to r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$x+0\cdot y+z=0$ $\quad x=-t$
$y=0$ $\quad y=0$
$z=t$ $\quad z=t$

$$V(4)=\left\{\begin{pmatrix}t\\0\\t\end{pmatrix}\middle|\,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\rangle$$

ορθοκανονική βάση του $V(4)$

$$[L_A]_\alpha^\alpha = [I]_\varepsilon^\alpha [L_A]_\varepsilon^\varepsilon [I]_\alpha^\varepsilon$$

ε κανονική βάση
α την βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα

$$\begin{array}{cccc} & P^t & A & P \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & 0 & 1/\sqrt2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt2 & 0 & 1/\sqrt2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & 0 & -1/\sqrt2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt2 & 0 & 1/\sqrt2 \end{pmatrix}$$

$$L_A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ 0 \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ 0 \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ 0 \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix}$$

Τετραγωνικές Μορφές

Ορισμός Μια τετραγωνική μορφή του R^n (του $R^{n\times1}$) είναι μια απεικόνιση $q(x): R^{n\times1} \to R$ της μορφής

$$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} x_i x_j$$

Παραδείγματα: $R^{2\times1} \xrightarrow{q_1} R$ $\quad q_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$

$q_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -4x_1x_2 + 7x_2^2$

$R^{3\times1} \xrightarrow{q} R \quad q_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 3x_3^2$

Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \frac{\alpha_{12}}{2} & \frac{\alpha_{13}}{2} \\ \frac{\alpha_{12}}{2} & \alpha_{22} & \alpha_{23}/2 \\ \frac{\alpha_{13}}{2} & \frac{\alpha_{23}}{2} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

λέγεται πίνακας της τετραγωνικής μορφής

$$q = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} x_{ij}$$

Παραδείγματα: Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής

q_1 είναι: $\begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

q_2 είναι: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & +7 \end{pmatrix}$

ϕ_1 είναι: $\begin{pmatrix} -2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij} x_i x_j = \underbrace{(x_1 \; x_2 \; x_n)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}/2 & & \\ \alpha_{12}/2 & \alpha_{22} & \frac{\alpha_{ij}}{2} & \\ & & \alpha_{33} & \\ \frac{\alpha_{ij}}{2} & & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{n\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1}$$

συμμετρικός

$$q(x) = x^t \cdot A x$$

Ορισμός: Μια τετραγωνική μορφή του $R^{n\times 1}$ της μορφής $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \quad + a_n x_n^2$

λέγεται διαγώνια τετραγωνική μορφή.

Ο πίνακας μιας διαγώνιας τετραγωνικής μορφής είναι:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \; a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [I]^{a}_{\beta} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$X = P \cdot Z$

οι συν. του $\vec{v}$ στην βάση α

οι συν. του $\vec{v}$ στη βάση β

$$q(x) = X^t \cdot A \cdot X = (PZ)^t \cdot A \cdot P Z$$

επειδή

$$= Z^t \underbrace{P^t \cdot A \cdot P}_{B} Z$$

$$q'(Z) = Z^t \cdot B \cdot Z$$

$q'(z)$ είναι η τετραγωνική μορφή που προκύπτει από την $q(x)$ με αλλαγή συντεταγμένων $X = P \cdot Z$

Φασματικό Θεώρημα Α συμμετρικός <=> υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$q(x) = X^t \cdot A \cdot X = (PZ)^t \cdot A(PZ)$$

$$= Z^t \underbrace{P^t \cdot A \cdot B}\, Z$$

$$= Z^t \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot Z$$

$$= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$$

Θεώρημα: Έστω $q: \mathbb{R}^{n \times 1} \to \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή τότε υπάρχει αλλαγή συντεταγμένων έτσι ώστε η τετραγωνική μορφή που θα προκύψει να είναι διαγώνια $q'(z) = z^t \cdot B \cdot z$

Άσκηση: Έστω $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$

τετραγωνική μορφή. Βρείτε τον πίνακα της γραμμικής μορφής και ορθογώνιο πίνακα P έτσι ώστε από την αλλαγή μεταβλητών
$x = P \cdot z$ να προκύψει διαγώνια τετραγωνική μορφή

Λύση

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} = P^t \cdot A \cdot P$$

Ιδιοτιμές

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 0 & -2 \\ 0 & 2-x & -2 \\ -2 & -2 & 3-x \end{vmatrix}$$